Μετρήσεις-Αβεβαιότητα-Σφάλματα.

Η μέτρηση ενός μεγέθους στο εργαστήριο μπορεί να είναι:

ΑΜΕΣΗ
ή
ΕΜΜΕΣΗ

Στην άμεση μέτρηση το μέγεθος μετράται με κάποιο όργανο.
Στην έμμεση μέτρηση το μέγεθος υπολογίζεται από κάποιο τύπο.

Κάθε μέτρηση έχει ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ.
Αυτή την αβεβαιότητα την δείχνω γράφοντας τη μέτρηση ...
είτε σύμφωνα με τη θεωρία σφαλμάτων,
είτε με σημαντικά ψηφία.

Γραφή μετρήσεων σύμφωνα με τη Θεωρία σφαλμάτων

Γράφω τη μέτρηση με δυο αριθμούς $x \pm \delta x$ όπου:

x είναι το αποτέλεσμα για το μέγεθος που μετρώ. Πως το βρίσκω θα το δούμε παρακάτω. Δείχνει την τιμή του μεγέθους.

δx είναι το απόλυτο σφάλμα. Πως το βρίσκω θα το δούμε παρακάτω. Δείχνει την αβεβαιότητα της μέτρησης.

Το δx είναι θετικός αριθμός και έχει μονάδες ίδιες με το αποτέλεσμα.

Ισοδύναμα μπορώ να γράψω: $x \pm \Sigma_{\sigma x}$ όπου

x : Το αποτέλεσμα

$\Sigma_{\sigma x}$: Το σχετικό σφάλμα, το οποίο είναι ίσο με $\delta x / x$.

Εάν πολλαπλασιάσω το $\Sigma_{\sigma x}$ με 100 έχω το επί τοις (% $\Sigma_{\sigma x}$).

Το σχετικό σφάλμα δεν έχει μονάδες και εκφράζει την ακρίβεια της μέτρησης.

Μικρό $\Sigma_{\sigma x}$ σημαίνει μεγάλη ακρίβεια.

Παράδειγμα : Έχω τη μέτρηση (150 ± 3)m.

Το 150m είναι το αποτέλεσμα του μεγέθους και το 3m είναι το απόλυτο σφάλμα.

Το σχετικό σφάλμα τότε είναι: $\Sigma_{\sigma x} = \delta x / x = 3m/150m = 0{,}02$

και το % σχετικό σφάλμα % $\Sigma_{\sigma x} = 3m*100/150m = 2\%$.

Άρα η μέτρηση μπορεί να γραφεί:

(150 ± 3)m. ή 150m ± 0,02 ή 150m ± 2%

Συνοπτικά

Η μέτρηση μπορεί να είναι:

ΑΜΕΣΗ

ή ΕΜΜΕΣΗ

Κάθε μέτρηση έχει ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ.

Παρουσιάζοντας τη μέτρηση σύμφωνα με τη θεωρία σφαλμάτων γράφω δυο αριθμούς:

$x \pm \delta x$ ή $x \pm \Sigma_{\sigma x}$ ή $x \pm \%\Sigma_{\sigma x}$ όπου

x: Το αποτέλεσμα

δx: Το Απόλυτο σφάλμα.

$\Sigma_{\sigma x}$: Το σχετικό σφάλμα.

$\%\Sigma_{\sigma x}$: Το % σχετικό σφάλμα.

Το σχετικό σφάλμα είναι ίσο $\delta x/x$ δεν έχει μονάδες και εκφράζει την ακρίβεια της μέτρησης.

Πως βρίσκω το x και δx σε άμεση μέτρηση μετρώντας το μέγεθος μία φορά.

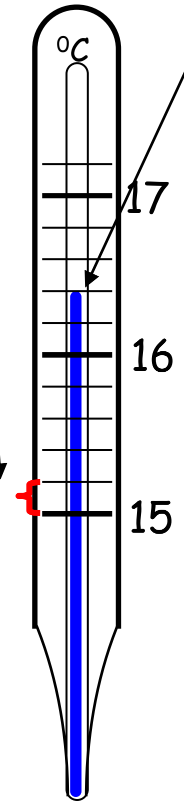
Το x είναι το αποτέλεσμα της μίας μέτρησης.
Το δx είναι Το μέγιστο σφάλμα του οργάνου.
Τι είναι όμως το μέγιστο σφάλμα του οργάνου;

Στο αναλογικό όργανο είναι η μικρότερη υποδιαίρεση της κλίμακας του οργάνου.
Στο ψηφιακό είναι το βήμα αλλαγής του τελευταίου ψηφίου του αποτελέσματος.

Παράδειγμα για αναλογικό όργανο.

Πρώτα βρίσκω την μικρότερη υποδιαίρεση του οργάνου.

Η μικρότερη υποδιαίρεση είναι 0,2 ^{0}C γιατί μεταξύ 15 και 16 υπάρχουν 5 κομμάτια άρα το κάθε κομμάτι είναι 1/5 ή 2/10 ή 0,2.



Άρα το αποτέλεσμα x της μέτρησης είναι 16,4 ^{0}C.

Το απόλυτο σφάλμα δx είναι το μέγιστο σφάλμα του οργάνου δηλαδή η μικρότερη υποδιαίρεση του.

Άρα το 0,2 ^{0}C.

Η μέτρηση μου λοιπόν γράφεται (16,4 ± 0,2) ^{0}C.

Παράδειγμα για ψηφιακό όργανο.

Το αποτέλεσμα x της μέτρησης είναι αυτό που μου δείχνει το όργανο δηλαδή 15,12 g.

Είπαμε ότι το μέγιστο σφάλμα δx σε ψηφιακό όργανο είναι το βήμα αλλαγής του τελευταίου ψηφίου του αποτελέσματος. Αυτό συνήθως γράφεται πάνω στο όργανο. Διαφορετικά πρέπει εγώ να το βρω. Στις περισσότερες φορές το βήμα είναι «1»

Στο παράδειγμα μας γράφεται πάνω d=0,01g

Άρα το μέγιστο σφάλμα του οργάνου δx είναι το 0,01g.

Η μέτρηση μου λοιπόν γράφεται:

$$(15{,}12 \pm 0{,}01)\ g$$

Αν δεν γραφόταν θα έπρεπε να βρω ποια θα μπορούσε να είναι η αμέσως επόμενη μέτρηση για να βρω έτσι το βήμα και συνεπώς το δx. Αν για παράδειγμα η αμέσως επόμενη μέτρηση ήταν 15.13 το βήμα θα ήταν 0,01 αν ήταν 15.14 θα ήταν 0,02 κ.ο.κ.

Πως βρίσκω το x και δx σε Άμεση μέτρηση μετρώντας το μέγεθος πολλές φορές.

Το x είναι η μέση τιμή ($\bar{x}$).

Το δx είναι το μέσο σφάλμα της μέσης τιμής (σ).

Πως βρίσκω τη μέση τιμή $\bar{x}$ όταν κάνω N μετρήσεις.

είτε από τη σχέση $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}$

είτε με τον Η/Υ ή το υπολογιστικό μηχανάκι.

Πως βρίσκω το μέσο σφάλμα της μέσης τιμής (σ) όταν κάνω N μετρήσεις.

είτε από τη σχέση $\sigma = \sqrt{\dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots (x_N - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$

είτε με τον Η/Υ ή το υπολογιστικό μηχανάκι.

Συνοπτικά

$x \pm \delta x$

Άμεση μέτρηση (Όργανο)

Μία φορά

Το x είναι το αποτέλεσμα της μίας μέτρησης.

Το δx είναι το μέγιστο σφάλμα του οργάνου.

Στο αναλογικό όργανο το δx είναι η μικρότερη υποδιαίρεση του οργάνου.

Στο ψηφιακό το δx είναι το βήμα αλλαγής του τελευταίου ψηφίου του αποτελέσματος.

Πολλές φορές

Το x είναι η μέση τιμή ($\overline{x}$).

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}$$

Το δx είναι το μέσο σφάλμα της μέσης τιμής (σ).

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \ldots (x_N - \overline{x})^2}{N(N-1)}}$$

Το $\overline{x}$ και το σ μπορούμε να τα βρούμε και με τον Η/Υ ή το υπολογιστικό μηχανάκι.

Πως βρίσκω το x και δx σε Έμμεση μέτρηση όταν ο τύπος περιέχει γινόμενο, πηλίκο ή δύναμη,

Το x είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει αν στον τύπο αντικαταστήσω τα μεγέθη με τα αποτελέσματα των μετρήσεων (χωρίς τα σφάλματα.)

Για να βρω το δx εφαρμόζω την πρόταση:
Το σχετικό σφάλμα Σσχ του μεγέθους της έμμεσης μέτρησης είναι ίσο με το άθροισμα των σχετικών σφαλμάτων των μεγεθών που υπάρχουν στον τύπο.

Παράδειγμα: *Θέλω να βρω το V και το δV από τον τύπο* $V=\pi \bullet d^2 \bullet L$.

Γνωρίζω τη μέτρηση του d: (10 ±1)cm και του L: (100 ±10)cm

Άρα $V=\pi \bullet d^2 \bullet L = 3{,}14 \bullet (10cm)^2 \bullet 100cm = 31400cm^3$

$\Sigma_{\sigma\chi V} = 2\Sigma_{\sigma\chi d} + \Sigma_{\sigma\chi L}$

Οι σταθεροί όροι δεν έχουν σφάλμα

Ο εκθέτης γίνεται πολλαπλασιαστικός παράγοντας στο σχετικό σφάλμα

Έχω λοιπόν

$$\frac{\delta V}{V} = 2*\frac{\delta d}{d} + \frac{\delta L}{L} \quad \text{Άρα } \delta V = V(2*\frac{\delta d}{d} + \frac{\delta L}{L}) = 31400cm^3*(2*\frac{1cm}{10cm} + \frac{10cm}{100cm}) = 9420cm^3$$

Πως βρίσκω το x και δx σε Έμμεση μέτρηση όταν ο τύπος περιέχει άθροισμα ή διαφορά.

Το x πάλι είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει αν στον τύπο αντικαταστήσω τα μεγέθη με τα αποτελέσματα των μετρήσεων (χωρίς τα σφάλματα.)

Το δx το βρίσκω εφαρμόζοντας την πρόταση:
Το απόλυτο σφάλμα δx του μεγέθους της έμμεσης μέτρησης είναι ίσο με το άθροισμα των απόλυτων σφαλμάτων των μεγεθών που υπάρχουν στον τύπο.

Παράδειγμα: Θέλω να βρω το Δθ και το δΔθ από τον τύπο: $\Delta\theta = \theta\tau - \theta\alpha$

Γνωρίζω τη μέτρηση του θτ: $(100 \pm 2)\ ^0C$ και του θα: $(20 \pm 1)\ ^0C$

Άρα $\Delta\theta = \theta\tau - \theta\alpha = 100\ ^0C - 20\ ^0C = 80\ ^0C$

$\delta\Delta\theta = \delta\theta\tau + \delta\theta\alpha = 2\ ^0C + 1\ ^0C = 3\ ^0C$

Συνοπτικά

$x \pm \delta x$

$\Sigma \sigma \chi = \delta x / x$

Έμμεση μέτρηση (Τύπος)

Γινόμενο, πηλίκο ή δύναμη

Άθροισμα ή διαφορά.

Το x είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει αν στον τύπο αντικαταστήσω τα μεγέθη με τα αποτελέσματα των μετρήσεων (χωρίς τα σφάλματα.)

Το σχετικό σφάλμα της έμμεσης ίσο με το άθροισμα των σχετικών σφαλμάτων των μεγεθών που υπάρχουν στον τύπο.

Το απόλυτο σφάλμα της έμμεσης ίσο με το άθροισμα των απόλυτων σφαλμάτων των μεγεθών που υπάρχουν στον τύπο.

Να θυμάστε:
Οι σταθεροί όροι δεν έχουν σφάλμα
Ο εκθέτης γίνεται πολλαπλασιαστικός παράγοντας στο σχετικό σφάλμα
Πάντα έχω άθροισμα στα σφάλματα

Με πόσα ψηφία γράφω το x και δx:

Ξεκινώ από το δx και εφαρμόζω τον κανόνα:

Γράφω το δx με ένα μη μηδενικό ψηφίο.

Τι σημαίνει αυτό: Μηδενίζω όλα τα ψηφία εκτός από ένα το «πιο δυνατό» Κρατώ όπως λέμε τη μεγαλύτερη τάξη μεγέθους. (Στους αριθμούς οι τάξεις είναι: Τα δέκατα, τα εκατοστά, τα χιλιοστά κ.οκ. Οι μονάδες, οι δεκάδες, οι εκατοντάδες, οι χιλιάδες κ.ο.κ.)

Παράδειγμα: δx = 0,321 γράφω 0,300 = 0,3
δx =12,321 γράφω 10,000 = 10
δx = 38,321 γράφω 40,000 = 40
(Το 3 έγινε 4 λόγω στρογγυλοποίησης.)

Για το x τώρα εφαρμόζω τον κανόνα:

Γράφω το x έτσι ώστε να έχει την ίδια τάξη μεγέθους με το δx

Τι σημαίνει αυτό: Εάν το δx έχει π.χ. δέκατα θα κρατήσω στο x μέχρι τα δέκατα και θα μηδενίσω από κει και κάτω.
αν το δx έχει μονάδες θα κρατήσω στο x μέχρι μονάδες κ.ο.κ

Π.χ. Αν δx=0,3 και x=53,2457 γράφω x= 53,2 (μέχρι δέκατα) άρα: (53,2 ± 0,3)...
Αν δx=10 και x=153,2457 γράφω x= 150 (μέχρι δεκάδες) άρα: (150 ± 10)...
Αν δx=10 και x=156,2457 γράφω x= 160 (μέχρι δεκάδες) άρα: (160 ± 10)...
(Το 5 έγινε 6 λόγω στρογγυλοποίησης.)

Εκατοστιαία διαφορά X

Αν ξέρω την αληθινή τιμή X_A του μεγέθους που μετρώ, τότε μπορώ να βρω την εκατοστιαία διαφορά της πειραματικής τιμής X_Π, που εγώ μέτρησα, **ως προς** την αληθινή τιμή X_A, σύμφωνα με τη σχέση:

$$X = \frac{|X_\pi - X_A|}{X_A} * 100 = \ldots\ldots\ldots \ \%$$

Με την εκατοστιαία διαφορά μπορώ να δω πόσο κοντά είμαι στην αληθινή τιμή.

Την εκατοστιαία διαφορά τη γράφω με ένα ή το πολύ δύο μη μηδενικά ψηφία.

Παράδειγμα: Αν μέτρησα την πυκνότητα ενός υλικού ρ_Π = 2,8 g/cm^3 και η αληθινή τιμή είναι ρ_A= 2,7 g/cm^3 τότε η εκατοστιαία διαφορά X είναι:

$$X = \frac{|X_\pi - X_A|}{X_A} * 100 = \frac{|2{,}8g/cm^3 - 2{,}7g/cm^3|}{2{,}7g/cm^3} * 100 = 3{,}703\ldots = 4\%$$